OCENA DOKTORSKE DISERTACIJE
mr Djurdjice Takači

Na osnovu odluke Naučnog veća Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu od 15.1.1987. godine odredjeni smo u komisiju za ocenu doktorske disertacije mr Djurdjice Takači pod naslovom

"PRIBLIŽNO REŠAVANJE LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA U POLJU OPERATORA MIKUSINSKOG".

Podnosimo sledeći:

IZVEŠTAJ

Već pred drugi svetski rat pokazalo se da rešavanje matematičkih modela, posebno onih koji su dati u obliku parcijalne diferencijalne jednačine, zahteva proširenje skupa numeričkih funkcija. Dato je više modela takvih skupova. Pedesetih godina, poljski matematičar Jan Mikusinski sa svojim učenicima razvio je teoriju skupa operatora $\mathcal{M}$ koji je uopštavao skup numeričkih funkcija, lokalno integrabilnih sa nosačem u desnoj polupravoj. Skup operatora Mikusinskog $\mathcal{M}$ ima prednosti i nedostatke u odnosu na druge skupove uopštenih funkcija. On ima veoma bogatu algebarsku strukturu, strukturu polja. Nažalost, njegova topološka struktura je veoma siromašna, definisana je samo konvergentnom klasom koja nije topološka. Napomenimo da se teorija konvergentnih klasa razvija intenzivnije tek poslednjih petnaest godina i to baš pod uticajem polja operatora Mikusinskog.

B.Stanković je 1977. godine pokazao da se teorija J.Mikusinskog može efikasno koristiti i u teoriji odredjivanja približnih rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina kao i jednačina u kojima se javljaju i parcijalni izvodi i translacija. To je bilo interesantno iz dva razloga. Prvo, što je nalaženje približnih rešenja ovih jednačina i ocena greške veoma težak problem kome je danas posvećeno dosta radova u matematičkoj literaturi. Drugo, što je ovaj prilaz, iako veoma apstraktan, dozvoljavao korišćenje računske mašine za odredjivanje numeričkih koeficijenata koji odredjuju približno rešenje i ocenu greške. Radovi B.Stankovića koje je on nastavio u saradnji sa D.Hercegom i doktorantom imali su lokalni karakter. Bili su vezani za okolinu nule. Svako povećanje te okoline znatno je uticalo na povećanje greške aproksimacije.

Napori kandidata u ovoj disertaciji upravljeni su u više pravaca: proširiti klase matematičkih modela za koje se mogu dobiti približna rešenja, poboljšati efikasnost metoda za slučaj lokalnog karaktera rešenja, proširiti metodu na globalna rešenja i ocenu greške za približno rešenje globalnog rešenja i što je i najznačajnije, odrediti konvergentnu klasu , najprikladniju za ovu aproksimaciju, koja daje teorijsku osnovu za ovu vrstu aproksimacija.

Koristeći se vezom izmedju operatora J.Mikusinskog i distribucija L.Schwartz-a, kandidat pokazuje da se svi njeni rezultati koji se odnose na rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina u polju operatora J.Mikusinskog mogu preneti i na traženje rešenja u skupu distribucija. To je posebno važno za primenu, jer su distribucije danas nezamenljiv aparat teorijske fizike i tehnike.

Efiksanost metoda ilustrovana je kroz numeričke tabele na kraju teze i preko primera odredjenih parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Teza ima 117 strana, koje su podeljene na četiri glave, plus sadržaj i osnovne oznake. Literatura sadrži 35 naslova.

Osnovni problem koji se rešava u tezi je vezan za nalaženje približnih rešenja i procenu njegovog odstupanja od tačnog rešenja za opštu operatorsku linearnu diferencijalnu jednačinu

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} d_{j,k} s^k x^{(j)}(\lambda) = f(\lambda), \quad 0 \leq \lambda \leq \lambda_1$$

uz uslov

$$x(0) = \phi_1, \ldots, x^{(m)}(0) = \phi_m ,$$

gde je s operator diferenciranja, $x(\lambda)$ tražena operatorska funkcija, $f(\lambda)$ zadata operatorska funkcija, a $\phi_1, \ldots, \phi_m$ zadati operatori. Problem se rešava za slučaj kada su koeficijenti $d_{j,k}$ konstantni, tj. kompleksni brojevi i kada navedenoj operatorskoj jednačini odgovara problem sa parcijalnom diferencijalnom jednačinom. No kandidat pokazuje da se postupak može primeniti i na slučaj kada su koeficijenti $d_{j,k}$ specijalni operatori i kada se navedena linearna operatorska jednačina svodi na parcijalno integralno-diferencijalno-diferentnu jednačinu.

Konstrukcija približnog rešenja operatorske jednačine bazira se na činjenici da tačno rešenje operatorske jednačine sa konstantnim koeficijentima ima reprezentaciju (jednog od linearno nezavisnih rešenja) $x(\lambda) = be^{\lambda\omega}$, gde je $\omega = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \ell^{i\alpha-\beta}$, za $\alpha > 0$ i $\beta \leqslant 1$ rešenje karakteristične jednačine, a b je operator odredjen datim naknadnim uslovom. Tada je približno rešenje oblika

$$x_n(\lambda) = be^{\lambda\omega_n}, \text{ gde je}$$

$$\omega_n = \sum_{i=0}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta} .$$

Zahvaljujući napred pomenutoj bogatoj algebarskoj strukturi polja operatora Mikusinskog omogućeno je nalaženje nula karakterističnog polinoma, te odredjivanje koeficijenata c_i u približnom rešenju kao i konstanti α i β pomoću računara.

Niz približnih rešenja $\{x_n(\lambda)\}$ konvergira ka tačnom rešenju $x(\lambda)$ u konvergenciji tipa I. Kandidat pokazuje da tada konvergira i u konvergenciji tipa I$'$, koju je uveo američki matematičar T.Boehme 1976. godine, a koja je topološka na potprostoru F_o prostora M, koji sadrži sve elemente oblika f/g gde je f iz prostora lokalno integrabilnih funkcija L, a g iz potprostora L_o od L, a koji sadrži sve funkcije g iz L da je $\|g\|_T = \int_o^T |g(t)|dt > 0$ za svako $T > 0$. Pomoću funkcionela $B_{T,\varepsilon}(x)$ $(x \in F_o)$ koju je 1983. godine uveo poljski matematičar J.Burzyk, kandidat je u saradnji sa prof. E.Papom uveo funkcionelu

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{i,1/i}(x)}{e^{ie^{i^2}}(1+B_{i,1/i}(x))} , \quad (x \in F_o)$$

i pomoću ove funkcionele je dobijena pogodna mera aproksimacije u prostoru F_o, kome pripadaju približna i tačna rešanja posmatranih operatorskih jednačina.

Posebno treba istaći i konstrukciju mere aproksimacije u prostoru lokalno integrabilnih funkcija, koja je vezana za funkcionelu

$$F(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\| f \|_i}{e^{ie^{i^2}}(1+\| f \|_i)} , \quad (f \in L) .$$

Naime, ako je tačno rešenje lokalno integrabilna funkcija, onda se dobija ne samo procena u odnosu na funkcionelu F, odnosno konvergenciju u L, već se dobija da tada niz približnih rešenja konvergira u konvergenciji u L ka tačnom rešenju, dok se po dosadašnjoj teoriji moglo govoriti samo o konvergenciji tipa I. Dalje, faktor $e^{ie^{i^2}}$ koji se pojavljuje u obe funkcionele A i F (a i u funkcioneli G vezanoj za neprekidne funkcije) je prilično veliki i verovatno da se može donekle smanjiti, što ne bi bitno uticalo na suštinu same aproksimacije, jer treba voditi računa da je dobijena procena za celu klasu linearnih operatorskih diferencijalnih jednačina, te da se za specijalne slučajeve mogu uvesti funkcionele sa manjim faktorom.

U realizaciji ovih rezultata na pojedine slučajeve autor razvija i dodatno poboljšanje aproksimacije rešenja odredjujući ga u više koraka. Sam ovaj postupak je zanimljiv jer daje bolju aproksimaciju i smanjuje meru aproksimacije.

Na osnovu rezultata J.Wloke iz 1960. godine pokazano je da se ovom metodom mogu rešavati i parcijalne jednačine u prostoru distribucija.

Interesantni primeri, medju kojima ističemo jednačinu žilavo - elastičnog štapa, koji izlaze iz klasičnih okvira ukazuju na širinu klase problema na koje se može primeniti dobijena metoda.

Veliki broj brižljivo pripremljenih tabela na računaru ukazuju na zadovoljavajću praktičnu primenljivost dobijene metode.

Kratak pregled izloženih rezultata po glavama:

U prvoj glavi su dati uglavnom poznati rezultati vezani za operatore Mikusinskog potrebni u sledećim glavama. Tako se navode operatorske funkcije, konvergencije u prostoru M i F_o, operatorske diferencijalne jednačine, veza operatora i distribucija i Wright-ove funkcije. U ovoj glavi se definišu važne funkcionele A, F i G potrebne za procenu približnog rešenja.

Druga glava je osnova teze. Naime, u ovoj glavi je konstruisana mera aproksimacije za homogenu linearnu operatorsku jednačinu. U tu svrhu se daju specijalni oblici $(z_n(\lambda)$ i $z(\lambda))$ približnog i tačnog rešenja, za koje se pokazuje da pripadaju prostoru F_o. Zatim se procenjuje $B_{T,\varepsilon}(z_n(\lambda)-z(\lambda))$ i na osnovu toga se dobija procena za $A(z_m(\lambda)-z(\lambda))$. Pomoću funkcionele F vrši se procena u prostoru L.

U trećoj glavi se vrši konstrukcija približnog rešenja i procene na osnovu rezultata druge glave za nehomogenu linearnu operatorsku jednačinu.

U četvrtoj glavi se na primerima ilustruju rezultati iz druge i treće glave sa odgovarajućim tabelama. U klasi neprekidnih funkcija je posmatrano približno rešenje i nad konačnim intervalom [0,T] .

Z A K LJ U Č A K

Prema prikazanoj sadržini teze i analizi rezultata vidi se da se teza odnosi na savremene probleme matematike i koristi se matematičkim aparatom koji se stvarao u ovih dvadesetak godina do današnjih dana. Rezultati imaju neposrednu primenu na rešavanje matematičkih modela u kojima se javljaju operacije parcijalnog izvoda, translacije i integralenja. Za realizaciju približnih rešenja i procenu greške mogu se koristiti i računari, što ima posebne važnosti kod složenijih modela.

Rad na ovoj tezi zahtevao je od kandidata poznavanje više oblasti matematike. Od teorije parcijalnih diferencijalnih jednačina, teorije operatora J.Mikusinskog, klasa konvergencije do numeričkih postupaka i korišćenja računara.

Osnovni rezultati u tezi vezani za globalnu procenu odstupanje približnog rešenja za linearnu operatorsku jednačinu, predstavljaju značajan doprinos kako u razvoju ove savremene matematičke discipline, tako i primeni savremenih matematičkih metoda u drugim naukama i tehnici.

Predlažemo Naučnom veću da prihvati ovu tezu i odobri njenu odbranu.

Komisija:

B. Stanković

Akademik Stanković dr Bogoljub
red. prof. PMF-a u Novom Sadu

Pap Endre

Pap dr Endre,
red. prof. PMF-a u Novom Sadu

Dragoslav Herceg

Herceg dr Dragoslav
vanr. prof PMF-a u Novom Sadu